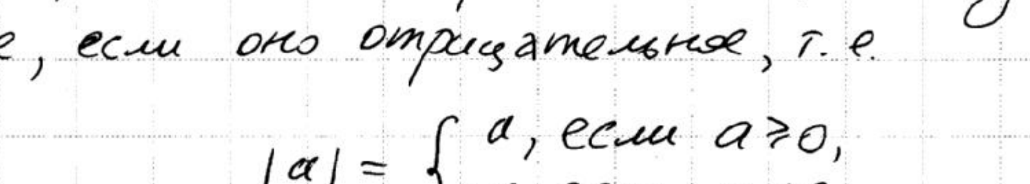
Неравенства
с модулем

– Решение неравенств с модулем с опорой на геометрический смысл модуля. –

Определение. Модулем числа называется само это число, если оно неотрицательное, и ему противоположное, если оно отрицательное, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля: модуль действительного числа a есть расстояние от начала координат до соответствующей числу a точки на числовой оси, выраженное в единичных отрезках.

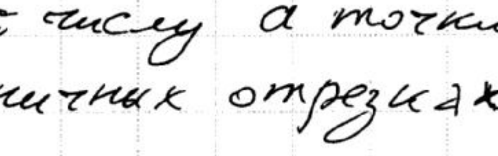


$|-6| = 6$, $|5| = 5$, $|0| = 0$

Опираясь на геометрический смысл модуля, можно решать простейшие неравенства с модулем.

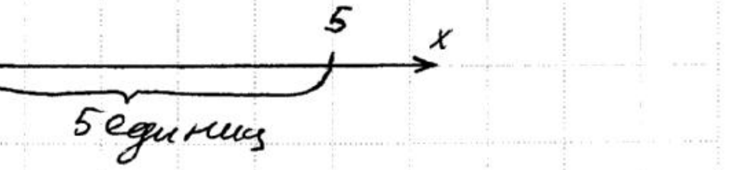
Примеры [1.] $|x| \leq 5$,

т.е. расстояние от соответствующей числу x точки до начала координат не превышает 5.



Ответ: $-5 \leq x \leq 5$.

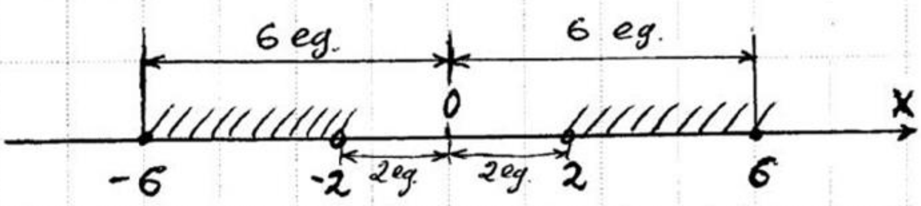
[2.] $|x| > 3$, т.е. расстояние от точки x до 0 больше 3.



Ответ: $x < -3$, $x > 3$

$\boxed{3}$ $2 < |x| \le 6$,

т. е. расстояние от точки x до нуля больше двух и меньше или равно шести.



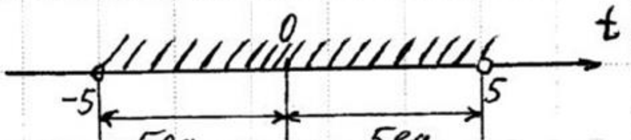
Ответ: $-6 \le x < -2$, $2 < x \le 6$

Если под модулем стоит выражение, то, заменив его буквой, мы получим неравенства, решаемые с опорой на геометрический смысл модуля.

Примеры $\boxed{4}$ $|2x-3| < 5$.

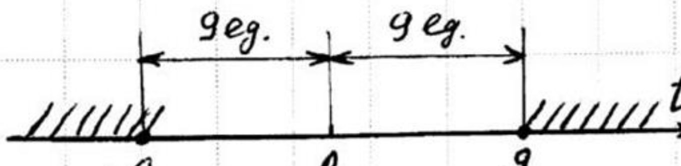
Пусть $2x-3 = t$, тогда $|t| < 5$,

т. е. расстояние от 0 до t меньше пяти, значит, $-5 < t < 5$,



$-5 < 2x-3 < 5$, $-2 < 2x < 8$, $-1 < x < 4$. Ответ: $(-1;4)$.

$\boxed{5}$ $|5-4x| \ge 9$.



Заметим сначала, что

$|5-4x| = |-(4x-5)| = |4x-5|$,

т. е. нер-во имеет вид $|4x-5| \ge 9$. Если $4x-5 = t$, то $|t| \ge 9$, т. е. расстояние от t до нуля не меньше девяти.

Это означает, что $t \le -9$ или $t \ge 9$

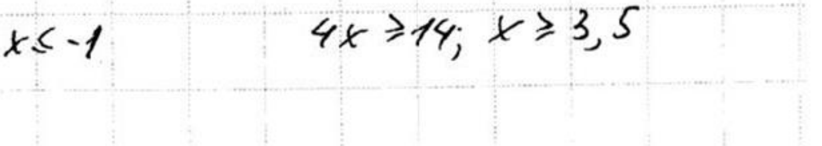
$4x-5 \le -9$ $\qquad$ $4x-5 \ge 9$

$4x \le -4$; $x \le -1$ $\qquad$ $4x \ge 14$; $x \ge 3{,}5$

Ответ: $x \le -1$; $x \ge 3{,}5$

$\boxed{6}$ $4 \le |5x+8| < 7$.

Переходя к неравенству $4 \le |t| < 7$ (где $t = 5x+8$),



и опираясь на геометрический смысл модуля, получим

$-7 < t \le -4$ или $4 \le t < 7$

$-7 < 5x+8 \le -4$ $\qquad$ $4 \le 5x+8 < 7$

$-15 < 5x \le -12$ $\qquad$ $-4 \le 5x < -1$

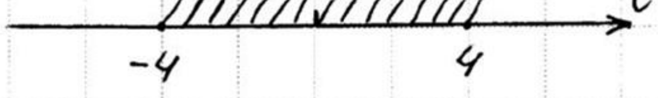
$-3 < x \le -2{,}4$ $\qquad$ $-0{,}8 \le x < -0{,}2$

Ответ: $(-3;-2{,}4] \cup [-0{,}8;-0{,}2)$

– Неравенства с модулем –

$\boxed{7}$ $-1 \le |6x-3| \le 4$

Заметим, что данное нер-во равносильно системе



$\begin{cases} |6x-3| \ge -1 \\ |6x-3| \le 4 \end{cases}$, причем 1-ое нер-во этой системы справедливо при любом x, а 2-ое нер-во после введения переменной $t = 6x-3$ приобретает вид $|t| \le 4$, что равносильно $-4 \le t \le 4$, $-4 \le 6x-3 \le 4$, $-1 \le 6x \le 7$, $-\frac{1}{6} \le x \le \frac{7}{6}$. Ответ: $[-\frac{1}{6}; \frac{7}{6}]$.

Упражнения для самостоятельного решения.

Решите следующие неравенства:

(1) $|x| < 3$ (2) $|x| \le 2$ (3) $|2x-1| < 7$ (4) $|5-4x| \le 2$

(5) $|x| > 7$ (6) $|x| \ge 8{,}5$ (7) $|3x-5| \ge 7$ (8) $|3-2x| > 1$

(9) $|x-3| < -2$ (10) $|x-4| \le 0$ (11) $|5x-7| \ge 0$ (12) $|4x-10| > 0$

(13) $1 < |x| \le 2$ (14) $2 \le |2x-3| < 5$ (15) $-4 < |5x-9| < 7$

(16) $||x-3|-2| \le 1$ (17) $||x-4|-2| < 3$ (18) $||3x-4|-5| > 1$

(19) $|x^2-5x| < 6$ (20) $|x^2+2x| \ge 3$ (21) $|3x^2-4x-2| > 2$

Ответы:

(1) $-3 < x < 3$ (2) $-2 \le x \le 2$ (3) $-3 < x < 4$ (4) $\frac{3}{4} \le x \le \frac{7}{4}$

(5) $x < -7$; $x > 7$ (6) $x \le -8{,}5$; $x \ge 8{,}5$ (7) $x \le -\frac{2}{3}$; $x \ge 4$ (8) $x < 1$; $x > 2$

(9) $\varnothing$ (10) $x = 4$ (11) x – любое число (12) $x \ne 2{,}5$

(13) $-2 \le x < -1$; $1 < x \le 2$ (14) $-1 < x \le 0{,}5$; $2{,}5 \le x < 4$ (15) $0{,}4 < x < 3{,}2$

(16) $0 \le x \le 2$; $4 \le x \le 6$ (17) $-1 < x < 9$ (18) $x < -\frac{2}{3}$; $0 < x < \frac{8}{3}$; $x > \frac{10}{3}$ (19) $-1 < x < 2$; $3 < x < 6$ (20) $x \le -3$; $x \ge 1$ (21) $x < -\frac{2}{3}$; $0 < x < \frac{4}{3}$; $x > 2$.