Теория вероятностей для школьников

Что изучает теория вероятностей.

В курсах математики и физики обычно рассматриваются только такие задачи, в которых результат действия однозначно определен. Например, если выпустить камень из рук, то он начинает падать с постоянным ускорением. Положение камня может быть вычислено в любой момент времени. Но если подбросить монету, то нельзя предсказать, какой стороной она ляжет вверх – гербом или цифрой. Здесь результат наших действий не определен однозначно. Может показаться, что в подобных задачах ничего определенного сказать нельзя, но даже обычная игровая практика показывает обратное: при большом числе бросаний монеты примерно в половине случаев выпадет герб, а в половине случаев – цифра. А это уже определённая закономерность. Подобного рода закономерности и изучаются в теории вероятностей. Изменяется в корне сама постановка задачи. Нас уже интересует не результат определенного опыта, а то, что получится после многократного повторения этого опыта. Коротко говорят, что в теории вероятностей изучаются закономерности массовых случайных событий.

Первичные понятия теории вероятностей: опыт и случайные события.

В теории вероятностей рассматривается следующая модель изучаемых явлений реальной жизни: проводится *опыт* (*испытание*), в результате происходят *случайные события* (обычно говорят короче – *события*). Например, бросают монету и смотрят, какая ее сторона оказалась сверху. В результате этого опыта может выпасть герб – это одно событие, а может выпасть цифра – это другое событие. Поскольку выпадение герба зависит от случая, то это *случайное событие*.
Итак, дадим определение первичных понятий теории вероятностей.

Опыт (испытание) – это производимые действия.

Событие – это результат опыта.

Какое-либо конкретное событие является, как правило, делом случая (оно может произойти, а может и не произойти) и поэтому оно называется ***случайным***.

События принято обозначать буквами. Например, в опыте с бросанием монеты событие “выпал герб” будем обозначать буквой Г, а событие “выпала цифра” – буквой Ц.

Упражнения.

В следующих опытах укажите события, которые могут в них происходить, и введите обозначения для этих событий.

1. Стреляют по мишени: а) один раз;   б) два раза.

2. Игральный кубик (кубик, на сторонах которого точками указаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6) бросают: а) один раз;   б) два раза.

3. Из ящика, в котором лежат 10 одинаковых (и неразличимых на ощупь) шаров, два из которых красных, а восемь – синих, наугад (не глядя) вынимают: а) один шар;   б) два шара.

Частота события.

В том случае, когда один и тот же опыт проводится несколько раз, можно найти частоту интересующего нас события.

Частотой события называется отношение числа испытаний, в которых появилось это событие, к общему числу испытаний.

Например, пусть произведено 100 выстрелов по мишени, из которых 80 попали в цель. Тогда частота попаданий равна $\frac{80}{100} = 0{,}8$.

Упражнения.

4. Миша и Дима стреляют по мишени. Результат Миши: 14 попаданий из 25-ти. Результат Димы: 9 попаданий из 15-ти. Найти частоту попаданий для каждого мальчика. Кто стреляет лучше?

5. Подбросьте 20 раз монету. Результаты опыта занесите в следующую таблицу (в ячейки нижней строки поставьте букву Г, если монета упала гербом вверх, и букву Ц, если монета упала цифрой вверх):

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Событие																				

Найдите частоту выпадений герба: а) при первых десяти бросках монеты; б) при последних десяти бросках монеты; в) при всех двадцати бросках монеты.

Вероятность события.

Многочисленные эксперименты показывают, что при достаточно большом числе испытаний частота события незначительно отличается от некоторого постоянного числа (колеблется около этого числа). Это число и называют ***вероятностью*** события.
В качестве вероятности события может быть принята частота события при большом количестве опытов или число, близкое к ней.
Пример. Английский ученый Пирсон произвел 23000 бросаний монеты. При этом герб появился 11512 раз. Значит, частота выпадения герба равна

$$\frac{11512}{23000} \approx 0{,}5005$$

Этот пример показывает, что за вероятность выпадения герба можно взять число 0,5.

Упражнения.

6. Можно ли считать, что частоты попаданий, найденные при решении задания **4**, задают вероятности попадания в мишень каждым из мальчиков? Обоснуйте свой ответ.

7. В Польше в 1927 году родилось 958 733 ребенка, из которых 496 544 были мальчиками. Найдите частоту рождения мальчиков в этом году. Можно ли полученный результат считать вероятностью рождения мальчика? Ответ обоснуйте.

8. Предложите способ определения вероятности победы кандидата в президенты на выборах.

ОТВЕТЫ и РЕШЕНИЯ некоторых упражнений приводятся в КОНЦЕ СТАТЬИ

Формула для вычисления вероятности события

Вероятность события иногда можно определить и путем простых математических вычислений. Делается это так.

1. Определим, какие самые простые события (будем их называть ***элементарными исходами***) могут произойти в данном опыте.

2. Мысленно удостоверимся в том, что все элементарные исходы ***равновозможны***, то есть, никакой элементарный исход по идее не должен происходить чаще или реже, чем другие.

3. Теперь выделим из всех исходов те, которые ***благоприятствуют*** интересующему нас событию.

Пусть теперь число всех элементарных исходов равно n, а число исходов, благоприятствующих данному событию – m. Тогда вероятность события равна

$$p = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет более двух очков.
Решение. Выпишем все элементарные равновозможные исходы, которые могут произойти в опыте по бросанию кубика, и подчеркнем те из них, которые благоприятствуют интересующему нас событию:
“выпало одно очко”;
“выпало два очка”;
“выпало три очка”;
“выпало четыре очка”;
“выпало пять очков”;
“выпало шесть очков”.
Итак, число всех исходов $n = 6$, а число благоприятных исходов $m = 4$. Значит, вероятность события равна

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ответ: 2/3.

Обратим особое внимание на то, что данный способ вычисления вероятности события не приемлем в случае, если элементарные исходы не являются *равновозможными*.

Практическое применение теории вероятностей

Закономерности, изучаемые теории вероятностей, используются и в реальной жизни. Рассмотрим, как эти закономерности используются в игровых заведениях для получения прибыли.
Пусть в некотором не очень крупном казино за день в среднем совершается 100 игр. Для упрощения предположим, что вероятность выигрыша клиента (посетителя казино) в каждой игре равна 0,3 (эту вероятность можно определить на основе несложных математических расчетов). Таким образом, за год в этом казино будет совершаться в среднем 36 500 игр. Каждая игра представляет своего рода опыт, который может завершиться или выигрышем клиента, или его проигрышем, то есть, выигрышем казино. При столь большом числе опытов-игр можно ожидать, что частота выигрыша клиента будет почти не отличаться от полученной путем теоретических расчетов вероятности 0,3. Соответственно частота выигрыша казино будет почти не отличаться от 0,7. Значит, примерно в $36500 \cdot 0,3 = 10950$ играх выиграет клиент, а примерно в $36500 \cdot 0,7 = 25550$ играх выиграет казино. Вообщем, как бы ни везло клиенту, но в выигрыше все равно окажется казино.

Решение некоторых задач ЕГЭ по теории вероятностей

Теперь разберем решения некоторых задач по теории вероятностей из сборника «ЕГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания группы В / А.Л. Семенов, И.В. Ященко, и др. – 3-е изд. – М.: Издательство «Экзамен», 2012.

При решении данных задач нами будет применяться описанный ранее способ вычисления вероятности события, так как ситуация, при которой элементарные исходы опыта не являются равновозможными, исключается.

№ 362 (нумерация заданий дается по выше упомянутому сборнику)
Папа, мама, сын и дочка бросили жребий – кому мыть посуду. Найдите вероятность того, что посуду будет мыть мама.

Решение. В опыте имеется четыре равновозможных исхода, из которых интересующему нас событию благоприятствует ровно один исход. Поэтому вероятность события равна

$$p = ¼ = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

№ 367
Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день 26 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жребием. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение. Предположим, что все выступления занумерованы числами от 1 до 50. При этом данные номера написаны на карточках (каждый номер на отдельной карточке). На третий день конкурса приходится 12 выступлений. Тогда задачу можно сформулировать так: какова вероятность, что при жеребьевке представитель России вытянет одну из соответствующих этим выступлениям двенадцати карточек? В опыте имеется 50 равновозможных исходов, из которых интересующему нас событию благоприятствуют 12. Поэтому вероятность события равна

$$p = 12/50 = 0{,}24.$$

Ответ: 0,24.

№ 377
На соревнования по метанию ядра приехали 2 спортсмена из Великобритании, 2 из Испании и 4 из Швеции. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что восьмым будет выступать спортсмен из Испании.

Решение. Предположим, что имена выступающих спортсменов написаны на карточках (каждое имя на отдельной карточке). В задаче сбивает с толку фраза «восьмым будет выступать спортсмен из Испании». На самом деле имеется в виду следующее: найдите вероятность, что при жеребьевке будет выбрана карточка с именем спортсмена из Испании. Итак, в опыте имеется 8 равновозможных исходов, из которых интересующему нас событию благоприятствуют 2 исхода. Поэтому вероятность события равна

$$p = 2/8 = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

№ 381
Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Меркурий» по очереди играет с командами «Марс», «Юпитер» и «Уран». Найдите вероятность того, что во всех матчах право владеть мячом выиграет команда «Меркурий».

Решение. При помощи цифры 1 будем показывать, что команда «Меркурий» будет первая владеть мячом в матче с одной из других трех команд, а при помощи цифры 0 будем показывать, что не будет первая владеть мячом. Возможные комбинации покажем в следующей таблице, где ещё выделим (в рамку) единственный благоприятный исход для интересующего нас события:

Владение мячом команды «Меркурий» в матче с командой…		
«Марс»	«Юпитер»	«Уран»
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Итак, вероятность события равна

$$p = 1/8 = 0{,}125.$$

Ответ: 0,125.

№ 390

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпадет орёл.

Решение. Обозначим выпадение орла буквой О, а выпадение решки – буквой Р. Выпишем все равновозможные исходы данного опыта, подчеркнув единственный исход, благоприятствующий интересующему нас событию:

$$\underline{\text{ОО}} \quad \text{ОР} \quad \text{РО} \quad \text{РР}.$$

Итак, вероятность события равна

$$p = ¼ = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

№ 396

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 6 очков. Ответ округлите до сотых.

Решение. Обозначим кости номерами *I* и *II*. Покажем в таблице все равновозможные исходы данного опыта (по количеству выпадаемых очков на костях), выделив в рамку исходы, благоприятствующие интересующему нас событию:

I	*II*	*I*	*II*	*I*	*II*	*I*	*II*	*I*	*II*	*I*	*II*
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Итак, число всех равновозможных исходов $n = 6 \cdot 6 = 36$, число благоприятных исходов $m = 5$. Значит, вероятность события равна $p = 5/36 = 0{,}138\ldots \approx 0{,}14$.

Ответ: вероятность события приближенно равна 0,14.

№ 414

Саша дважды бросает игральный кубик. В сумме у нее выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что при первом броске выпало 3 очка.

Решение. Учитывая дополнительное условие – сумма выпавших очков должна быть равна шести – покажем все равновозможные исходы данного опыта, выделив в рамку единственный исход, благоприятствующий интересующему нас событию (под номерами *I* и *II* пишутся очки, выпавшие на игральном кубике первый и второй раз соответственно):

I	*II*
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

Итак, число всех равновозможных исходов $n = 5$, число благоприятных исходов $m = 1$. Значит, вероятность события равна $p = 1/5 = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

№ 433

Таня и Нина играют в кости. Они бросают кость по одному разу. Выигрывает тот, кто выбросил больше очков. Если очков выпало поровну, то наступает ничья. В сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что Таня выиграла.

Решение. Покажем в таблице все равновозможные исходы данного опыта, выделив в рамку исходы, благоприятствующие интересующему нас событию (под номерами *I* и *II* пишутся очки, выпавшие при бросании кости Таней и Ниной соответственно):

I	*II*
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

Итак, число всех равновозможных исходов $n = 5$, число благоприятных исходов $m = 2$. Значит, вероятность события равна $p = 2/5 = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

ОТВЕТЫ и РЕШЕНИЯ некоторых упражнений

1. а) 1 (попадание), 0 (промах); б) 11, 10, 01, 00. **2.** б) см. таблицу из **№ 396**

4. 14/25 = 0,56 – частота попаданий Миши; 9/15 = 0,6 – частота попаданий Димы; Дима показал лучший результат, чем Миша

6. полученные частоты не имеют отношения к вероятности попадания в мишень каждым мальчиком, так как число сделанных выстрелов было недостаточно большим

7. частота рождения мальчиков равна 496544/958733 = 0,5179168…≈ 0,518; полученный результат вполне можно рассматривать как вероятность рождения мальчика, так как число опытов (рождений ребенка) было достаточно большим

8. опросить незадолго до выборов как можно больше людей, причем разных возрастов, социального положения и из разных регионов, намерены ли они голосовать за данного кандидата, и тогда частота ответивших «да» будет давать примерную вероятность победы кандидата на выборах