Уравнения и неравенства со знаком модуля.

Об авторе.

Автор данного пособия – опытный репетитор по математике, школьный учитель. Закончил физический факультет МГУ и физико-математическую школу им. А. Н. Колмогорова (ныне СУНЦ при МГУ).
Им написано множество хороших пособий по математике, одно из которых издано в форме книги:
Волков Д.А. ЕГЭ по математике. Практическая подготовка к заданию С3. – М.:ИЛЕКСА, 2014.
Материал, излагаемый в данном пособии, взят из этой книги и положен в основу его курса подготовки к ЕГЭ.

Личная страничка автора: **http://dmitrij.ucoz.net**

Содержание документа:

Решение уравнений со знаком модуля

Из школьного курса математики мы знаем, что

$$|5| = 5; \quad |-3| = 3; \quad |0| = 0.$$

О п р е д е л е н и е . Модулем числа называется само это число, если оно неотрицательное, и ему противоположное, если оно отрицательное.

Это определение можно записать кратко в следующей форме

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases} \qquad (1).$$

Здесь в качестве *a* можно рассматривать как число, так и букву, а также числовое или буквенное выражение.

Пример 1.

а) $\left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$, так как $\sqrt{3}-1>0$.

б) $\left|\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right| = -(\sqrt{5}-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-\sqrt{5}$, так как $\sqrt{5}-2\sqrt{2}<0$.

в) $\left|x^2-x+1\right| = x^2-x+1$, так как $x^2-x+1>0$ при любом *x*.

г) $\left|-a^2+4ab-4b^2\right| = -(-a^2+4ab-4b^2) = a^2-4ab+4b^2$, так как $-a^2+4ab-4b^2 \leq 0$ при любых *a* и *b* (подумайте сами, почему).

Принято говорить, что в этих примерах мы *раскрыли модуль*, то есть, перешли от выражения со знаком модуля к равному (или тождественно равному) ему выражению, но без знака модуля. Кстати, в связи с примером из пункта (г) полезно иметь в виду, что $|a|=-a$ не только при $a<0$, но также и при $a=0$. Ведь $|0|=0=-0$.

Когда *подмодульное* выражение (то есть, выражение, стоящее под знаком модуля) имеет определенный знак, то модуль раскрывается однозначно. Другое дело, если это выражение может иметь разный знак.

Пример 2. Пусть требуется написать без знака модуля выражение $|2x+5|$. Значение выражения $2x+5$, как известно, может быть как неотрицательным, так и отрицательным числом.

В равенство (1) вместо *a* подставим выражение $2x+5$. Получим

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5, \text{ если } 2x+5 \geq 0 \\ -(2x+5), \text{ если } 2x+5<0 \end{cases},$$

или после преобразований

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5, \text{ если } x \geq -2{,}5 \\ -2x-5, \text{ если } x < -2{,}5 \end{cases}.$$

Пример 3. Раскроем модуль в выражении $\left|2x^2-x-1\right|-5x+4$:

$$\left|2x^2-x-1\right|-5x+4 = \begin{cases} 2x^2-x-1-5x+4, \text{ если } 2x^2-x-1 \geq 0 \\ -(2x^2-x-1)-5x+4, \text{ если } 2x^2-x-1<0 \end{cases};$$

обратим внимание, что при раскрытии модуля изменяется только выражение, которое было под знаком модуля, выражения же вне знака модуля не изменяются.

После соответствующих преобразований получим

$$\left|2x^2-x-1\right|-5x+4 = \begin{cases} 2x^2-6x+3, \text{ если } x \in (-\infty;\,-0{,}5] \cup [1;\,+\infty) \\ -2x^2-4x+5, \text{ если } x \in (-0{,}5;\,1) \end{cases}.$$

На последней странице этого документа приведены **уравнения с модулем** и ответы к ним.

Пример 4. Разберем решение уравнения **№ 9**:

$|3x+1|+x=9$.

Согласно определению модуля, если $3x+1 \geq 0$, то выражение $|3x+1|=3x+1$ и исходное уравнение приобретает вид

$$3x+1+x=9.$$

Если же $3x+1<0$, то $3x+1=-(3x+1)$, и уравнение приобретает вид

$$-(3x+1)+x=9.$$

Это можно понять так, что решения уравнения должны удовлетворять хотя бы одной из систем

$$\begin{cases}3x+1\ge 0\\3x+1+x=9\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}3x+1<0\\-(3x+1)+x=9\end{cases}.$$

Для того, чтобы найти решения данной совокупности, решаем каждую систему и объединяем полученные к системам ответы.

Запись решения выглядит так:

$$\begin{cases}3x+1\ge 0\\3x+1+x=9\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}3x+1<0\\-(3x+1)+x=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x\ge -1\\4x=8\end{cases} \qquad \begin{cases}3x<-1\\-3x-1+x=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -\frac{1}{3}\\x=2\end{cases} \qquad \begin{cases}x<-\frac{1}{3}\\-2x=10\end{cases}$$

$$x=2 \qquad \begin{cases}x<-\frac{1}{3}\\x=-5\end{cases}$$

$$x=-5$$

Таким образом, корнями исходного уравнения являются числа 2 и –5.

Обратим внимание на то, что если требуется решить систему, содержащую уравнения и неравенства, то достаточно проверить, будут ли корни уравнений системы удовлетворять каждому из ее неравенств. Например, решая систему

$$\begin{cases}x\ge -\frac{1}{3}\\x=2\end{cases},$$

мы просто проверяем, удовлетворяет ли число $x=2$ неравенству $x\ge -\frac{1}{3}$. Так как ответ положительный, то делаем вывод, что число $x=2$ является решением системы.

Решая же систему

$$\begin{cases}x\ge -\frac{1}{3}\\x=-3\end{cases},$$

мы видим, что число $x=-3$ не удовлетворяет неравенству $x\ge -\frac{1}{3}$, или, говоря иначе, обращает его в неверное числовое неравенство $-3\ge -\frac{1}{3}$. Поэтому данная система решений не имеет.

Любое другое уравнение со знаком модуля решается аналогично только что разобранному примеру.

Пример 5. Разберем ещё решение уравнения **№ 42**:

$9x^2-24x-|3x-4|=4$.

Используя определение модуля, заменяем данное уравнение равносильной ему совокупностью двух систем, решаем каждую систему и объединяем полученные к этим системам ответы:

$$\begin{cases}3x-4\ge 0\\9x^2-24x-(3x-4)=4\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}3x-4<0\\9x^2-24x+(3x-4)=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x\ge 4\\9x^2-27x=0\end{cases} \qquad \begin{cases}3x<4\\9x^2-21x-8=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge \frac{4}{3}\\9x(x-3)=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x<\frac{4}{3}\\\left[\begin{array}{l}x=\frac{8}{3}\\x=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \qquad\qquad x = -\frac{1}{3}$$

$$x = 3$$

Ответ: $-\frac{1}{3}; 3$.

Заметим, что числа $x = 0$ и $x = \frac{8}{3}$, являющиеся корнями квадратных уравнений этих систем, были отсеяны, так как не удовлетворяли неравенству соответствующей системы.

Обратим внимание также на то, что подробные выкладки, связанные с решением уравнений или неравенств обычно располагают отдельно от систем, а точнее, в промежутке между ними. Так в промежутке между системами

$$\begin{cases} 3x < 4 \\ 9x^2 - 21x - 8 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{8}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

можно было записать вычисления, связанные с нахождением корней квадратного уравнения первой из этих систем.

Решите выборочно несколько из приведенных в конце этого документа уравнений, содержащих один модуль. Проверьте ответы.

Решение неравенств со знаком модуля

Пример 6. Превратим уравнение из **№ 9** в следующее неравенство:

$|3x + 1| + x \geq 9$.

Решим это неравенство.

Решение.

Очевидно, данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 3x + 1 + x \geq 9 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x + 1 < 0 \\ -(3x + 1) + x \geq 9 \end{cases}.$$

Решим каждую систему данной совокупности и полученные решения к системам объединим.

Запись решения:

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 3x + 1 + x \geq 9 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x + 1 < 0 \\ -(3x + 1) + x \geq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geq -1 \\ 4x \geq 8 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 3x < -1 \\ -3x - 1 + x \geq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq 2 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ -2x \geq 10 \end{cases}$$

$$x \geq 2 \qquad\qquad \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x \leq -5 \end{cases}$$

$$x \leq -5$$

Ответ: $x \in (-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$.

Пример 7. Превратим уравнение из **№ 42** в следующее неравенство:

$9x^2 - 24x - |3x - 4| < 4$.

Решим данное неравенство, заменяя его равносильной совокупностью двух систем:

$$\begin{cases}3x-4\ge 0\\9x^2-24x-(3x-4)<4\end{cases}\quad \text{или} \quad \begin{cases}3x-4<0\\9x^2-24x+(3x-4)<4\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x\ge 4\\9x^2-27x<0\end{cases} \qquad \begin{cases}3x<4\\9x^2-21x-8<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge \dfrac{4}{3}\\9x(x-3)<0\end{cases} \qquad \begin{cases}x<\dfrac{4}{3}\\-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge \dfrac{4}{3}\\0<x<3\end{cases} \qquad -\frac{1}{3}<x<\frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}\le x<3$$

(подробные выкладки, связанные с решением квадратных неравенств каждой из систем, можно расположить в промежутке между соответствующими системами).

Объединением числовых промежутков $\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$ и $\left[\frac{4}{3};3\right)$ является числовой промежуток $\left(-\frac{1}{3};3\right)$, который, очевидно, и задает множество решений исходного неравенства.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3};3\right)$.

Превратите уравнения, которые вы ранее решали самостоятельно, в какое-нибудь из неравенств, заменив знак = одним из знаков: <, ≤, ≥ или >. Решите полученные неравенства. Убедитесь в том, что в ответе к каждому неравенству присутствуют корни соответствующего этому неравенству уравнения.

Свойства модуля и их применение

При работе с модулем полезно также знать его основные свойства и уметь их применять. Рассмотрим эти свойства последовательно и приведем примеры их использования.

1°. Модуль любого числа есть число неотрицательное, то есть, $|a|\ge 0$.

К сказанному полезно добавить, что

$$|a|=0 \;\Leftrightarrow\; a=0$$

$$|a|>0 \;\Leftrightarrow\; a\ne 0$$

(обоснуйте эти утверждения самостоятельно, для чего рассмотрите соответствующие числовые примеры).

Пример 8. На основании этих свойств можно утверждать, что уравнение

$$|2x+7|=-3$$

и неравенство

$$|3x^2-5x-4|\le -1$$

не имеют решений, а неравенства

$$|3x-7|\ge 0 \text{ и } |x^3-4x^2+8|>-3{,}4$$

справедливы для любого x.

Согласитесь, что решать данные уравнения и неравенства путем раскрытия модуля по определению, то есть, переходя к совокупности двух систем, очень долго, а решить таким путем последнее неравенство, скорее всего, вообще бы не удалось.

Пример 9. Приведем ещё один пример применения данных свойств к решению неравенств:

$$|4x+9|\le 0 \;\Leftrightarrow\; |4x+9|=0 \;\Leftrightarrow\; 4x+9=0 \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{9}{4}.$$

Действительно, условие $|4x+9|\le 0$ означает, что выражение $|4x+9|$ или отрицательно, или равно нулю. Так как выражение $|4x+9|$ не может быть отрицательно, то оно может быть только равно нулю. Но в этом случае подмодульное выражение тоже равно нулю.

2°. Модули противоположных чисел равны, то есть, $|-a|=|a|$.

Пример 10.

а) $|7-5x| = |-(5x-7)| = |5x-7|$; б) $|2x-3x^2-9| = |-(3x^2-2x+9)| = |3x^2-2x+9| = 3x^2-2x+9$.

3°. Квадрат модуля равен квадрату подмодульного выражения, то есть, $|a|^2 = a^2$.

Пример 11. С учетом того, что

$$|x+3|^2 = (x+3)^2,$$

уравнение

$$(x+3)^2 - |x+3| - 30 = 0$$

можно представить в виде

$$|x+3|^2 - |x+3| - 30 = 0,$$

а затем, введя замену переменной $|x+3| = t$, свести его к квадратному уравнению

$$t^2 - t - 30 = 0.$$

Решите самостоятельно это квадратное уравнение, а затем найдите корни исходного уравнения.
Ответ: 3; –9.

4°. Для любого целого n справедливо равенство

$$|x|^n = |x^n|,$$

а для любого целого четного p справедливо равенство

$$|x|^p = x^p.$$

Последнее из этих равенств является обобщением предыдущего свойства (**3°**).

5°. Модуль произведения (частного) двух чисел равен произведению (частному) модулей эти чисел:

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

Пример 12.

а) $|x^2-2x-3| = |(x+1)(x-3)| = |x-1| \cdot |x+3|$;

б) $|6-2x| = |-2(x-3)| = |-2| \cdot |x-3| = 2|x-3|$, то есть, из под знака модуля можно выносить положительный множитель;

в) $-5|x+0{,}4| = -|5| \cdot |x+0{,}4| = -|5(x+0{,}4)| = -|5x+2|$, то есть, под знак модуля можно вносить положительный множитель.

Пример 3. Используя свойства 4° и 5° можно выполнить следующие преобразования:

$|(x+7)^9(2x-3)| = |(x+7)^9| \cdot |2x-3| = |x+7|^9 \cdot |2x-3|$.

6°. Квадратный корень из квадрата числа равен модулю этого числа, то есть, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример 14.

$\sqrt{4x^2+12x+9} = \sqrt{(2x+3)^2} = |2x+3|$.

Уравнения с модулем

Решите уравнения:

1) $|x-5|=3$;
2) $|x+2|=4$;
3) $|x+7|=0$;
4) $|x+5|=-3$;
5) $||x|-2|=1$;
6) $|x+4|=2x$;
7) $|2x-3|=x$;
8) $|x+1|=-3x$;
9) $|3x+1|+x=9$;
10) $|x+2|=6-2x$;
11) $|3x-1|=x+2$;
12) $|x+5|=x$;
13) $|x+2|=x+2$;
14) $|x+2|=-x-2$;
15) $|2x+1|=|x-4|$;
16) $|x|=|2x-5|$;
17) $|x-6|=|x^2-5x+9|$;
18) $|x^2-2|=|x+4|$;
19) $x^2=|x+2|$;
20) $3x^2-|5x+2|=0$;
21) $|x^2+5|=6x$;
22) $|x^2+2x+3|=3x+45$;
23) $|x^2-4x|=5$;
24) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|=1$;
25) $x^2-5|x|=0$;
26) $3x^2+4|x|=0$;
27) $2x^2+|x|-3x=0$;
28) $4x^2-3|x|+x=0$;
29) $x^2+|x|-6=0$;
30) $x^2-2|x|-15=0$;
31) $2x^2+|x|-1=0$;
32) $2x^2-3|x|-2=0$;
33) $x|x|+7x+12=0$;
34) $|x^2+x-3|=x$;
35) $|x^2+x|+3x-5=0$;
36) $x^2-7|x|+6=0$;
37) $x^2-4|x|-21=0$;
38) $x^2+4x+|x+3|+3=0$;
39) $x^2+2x+2|x+1|=7$;
40) $x^2-2x-5|x-1|+5=0$;
41) $4x^2-12x-5|2x-3|+15=0$;
42) $9x^2-24x-|3x-4|=4$;
43) $(x-2)^2-8|x-2|+15=0$;
44) $(x+3)^2-|x+3|-30=0$;
45) $|x^2+3|x|-4|=x^2+2x$.

Ответы:

1) 2; 8 2) – 6; 2 3) –7 4) нет решений 5) $\pm1; \pm3$ 6) 4 7) 1; 3 8) $-\frac{1}{4}$ 9) –5; 2 10) $\frac{4}{3}$

11) $-\frac{1}{4}$; 1,5 12) нет решений 13) $x\ge -2$ 14) $x\le -2$ 15) –5; 1 16) $\frac{5}{3}$; 5 17) 1; 3 18) 3; –2

19) –1; 2 20) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$; –1; 2 21) 1; 5 22) – 6; 7 23) –1; 5 24) 0 25) 0; ±5 26) 0 27) 0; 1

28) –1; 0; $\frac{1}{2}$ 29) ±2; 30) ±5 31) $\pm\frac{1}{2}$; 32) ±2 33) $\frac{7-\sqrt{97}}{2}$ 34) 1; $\sqrt{3}$ 35) –5; 1

36) $\pm1; \pm6$ 37) ±7 38) –3; –2 39) –3; 1 40) –3; 0; 2; 5 41) 0; 0,5; 2,5; 3 42) $-\frac{1}{3}$; 3

43) –3; –1; 5; 7 44) 3; –9 45) $\frac{\sqrt{57}-5}{4}$; 4.
