Разложение на множители многочленов высших степеней. Деление многочленов в столбик

Об авторе.

Автор данного пособия – опытный репетитор по математике, школьный учитель. Закончил физический факультет МГУ и физико-математическую школу им. А. Н. Колмогорова (ныне СУНЦ при МГУ).
Им написано множество хороших пособий по математике, одно из которых издано в форме книги:
Волков Д.А. ЕГЭ по математике. Практическая подготовка к заданию С3. – М.:ИЛЕКСА, 2014.
Материал, излагаемый в данном пособии, взят из этой книги и положен в основу его курса подготовки к ЕГЭ.
Личная страничка автора: http://dmitrij.ucoz.net

Разложение на множители многочленов высших степеней. Деление многочленов в столбик

При решении неравенств и уравнений иногда возникает необходимость разложить на множители многочлен степени выше второй.
Как правило, многочлен степени выше второй разлагается на множители методом группировки. При этом иногда приходится применять формулы сокращенного умножения.

Пример 1. Решите неравенство

$8x^3-6x^2+3x-1\ge 0$.

Р е ш е н и е.

Заметим, что группировка

$8x^3-6x^2+3x-1=(8x^3-6x^2)+(3x-1)=2x^2(4x-3)+(3x-1)$

не проходит, как не пройдет и группировка

$8x^3-6x^2+3x-1=(8x^3+3x)+(-6x^2-1)$.

Остается единственный вариант: сгруппировать сначала разность кубов. Итак,

$8x^3-6x^2+3x-1=(8x^3-1)+(-6x^2+3x)=(2x-1)(4x^2+2x+1)-3x(2x-1)=$

$=(2x-1)(4x^2+2x+1-3x)=(2x-1)(4x^2-x+1)$.

Следовательно, исходное неравенство равносильно следующему

$(2x-1)(4x^2-x+1)\ge 0$.

Но $4x^2-x+1>0$ при любом *x*, поэтому последнее неравенства можно упростить

$2x-1\ge 0$

$x\ge 0{,}5$.

Ответ: $x\ge 0{,}5$.

Решите следующие неравенства:

5. $2x^4+3x^3+16x+24<0$ Ответ: $-2<x<-1{,}5$.

6. $x^3+5x^2+15x+27>0$ Ответ: $x>-3$.

При разложении многочленов на множители, полезно также иметь в виду следующие две теоремы.

Теорема 1. Если число α является корнем многочлена $P(x)$, то этот многочлен представим в виде

$$P(x) = (x-\alpha)\,Q(x)$$

(напомним, что число α является корнем многочлена $P(x)$ в том случае, если $P(\alpha) = 0$).

Теорема 2. Любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Пример 2. Решите неравенство

$x^3-5x-12\le 0$.

Р е ш е н и е.

В левой части данного неравенства многочлен с целыми коэффициентами. Если этот многочлен имеет целые корни, то, согласно *теореме* 2, они являются делителями свободного члена, то есть, числа -12. Значит, целыми корнями этого многочлена могут быть числа

$$\pm 1,\quad \pm 2,\quad \pm 3,\quad \pm 4,\quad \pm 6,\quad \pm 12.$$

Подбором находим, что корнем этого многочлена является число 3. Следовательно, согласно *теореме* 1, данный многочлен можно представить в виде

$$x^3-5x-12=(x-3)\cdot Q(x).$$

Для того чтобы получить такое представление, можно, например, сначала сгруппировать разность кубов:

$x^3-5x-12=(x^3-27)+(-5x+15)=(x-3)(x^2+3x+9)-5(x-3)=(x-3)(x^2+3x+9-5)=(x-3)(x^2+3x+4)$,

$x^3-5x-12=(x-3)(x^2+3x+4)$.

Таким образом, исходное неравенство равносильно следующему неравенству

$(x-3)(x^2+3x+4)\le 0$

или с учетом того, что выражение $x^2+3x+4>0$ при любом *x*, равносильно неравенству

$x-3\le 0$,

$x\le 3$.

Ответ: $x \le 3$.

Многочлен $Q(x) = x^2 + 3x + 4$ можно было получить и в результате деления многочлена $x^3 - 5x - 12$ на $x - 3$ в столбик:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 0x^2 - 5x - 12 & x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 3x^2} & x^2 + 3x + 4 \\
\quad 3x^2 - 5x & \\
\quad \underline{3x^2 - 9x} & \\
\qquad\quad 4x - 12 & \\
\qquad\quad \underline{4x - 12} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Деление многочленов в столбик очень похоже на деление в столбик многозначных натуральных чисел. Но во избежание недоразумений давайте опишем процесс деление многочленов подробно.

Члены делимого (многочлена $x^3 - 5x - 12$) располагаем по убывающим степеням переменной, причем для равномерного (ровно на единицу) уменьшения показателей этих степеней добавляем слагаемое $0x^2$. Старший член делимого (x^3) делим на старший член делителя (x), в результате получаем первое слагаемое частного $x^3 : x = x^2$, которое фактически является также старшим членом будущего ответа. Это слагаемое умножаем на члены делителя и результаты x^3 и $-3x^2$ подписываем под подобными им членами делимого x^3 и $0x^2$ соответственно. Вычитаем из верхних членов нижние, получаем первый остаток $3x^2$. Сносим к нему следующий член делимого $-5x$, получаем новое (неполное) делимое $3x^2 - 5x$. Старший член этого делимого ($3x^2$) делим на старший член делителя (x), получаем следующий член частного $3x^2 : x = 3x$, который умножаем на члены делителя, и т. д.

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 3. Решите неравенство

$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 17x - 10 \ge 0$.

Р е ш е н и е.

Согласно *теореме* 2, целыми корнями многочлена в левой части этого неравенства могут быть числа

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10.$$

Подбором находим, что одним из корней этого многочлена является число -1. Следовательно, согласно *теореме* 1, многочлен можно представить в виде

$$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 17x - 10 = (x+1) \cdot Q(x).$$

Найдем вид многочлена $Q(x)$ при помощи деления в столбик:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 17x - 10 & x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + x^3} & x^3 + 4x^2 - 7x - 10 \\
\quad 4x^3 - 3x^2 & \\
\quad \underline{4x^3 + 4x^2} & \\
\qquad -7x^2 - 17x & \\
\qquad \underline{-7x^2 - 7x} & \\
\qquad\quad -10x - 10 & \\
\qquad\quad \underline{-10x - 10} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Итак,

$$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 17x - 10 = (x+1) \cdot (x^3 + 4x^2 - 7x - 10).$$

Теперь можно заметить, что число -1 также является корнем многочлена $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, значит, этот многочлен можно представить в виде

$$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x+1) \cdot Q_1(x),$$

причем вид многочлена $Q_1(x)$ можно найти при помощи деления в столбик $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ на $x + 1$. Выполните данное деление в столбик самостоятельно.

В результате получаем, что

$$x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x+1)(x^2 + 3x - 10).$$

Поэтому

$$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 17x - 10 = (x+1)^2 (x^2 + 3x - 10).$$

Осталось учесть, что корнями трехчлена

$$x^2+3x-10$$

являются числа –5 и 2, следовательно

$$x^2+3x-10=(x+5)(x-2).$$

Итак, исходное неравенство равносильно следующему

$$(x+1)^2(x+5)(x-2)\geq 0.$$

А последнее неравенство уже легко решается методом интервалов.

Ответ: $(-\infty;-5]\cup\{-1\}\cup[2;+\infty)$

Решите следующие неравенства:

7. $x^4-x^3-13x^2+x+12<0$ Ответ: $(-3;-1)\cup(1;4)$.

8. $\dfrac{2x^2}{x-3}\leq\dfrac{1}{x-1}$ Ответ: $x\leq -1,\ \ 1<x<3$.
